Curso de Geometría Métrica

Tomo I Fundamentos

P. Puig Adam

Resolución de los ejercicios

Juan Martínez Tarrazó

Contents

Introducción

Experiencia, intuición y lógica en la génesis de la Ciencia.

Numerosísimos son los ejemplos y curiosidades que muestran la insuficiencia o los engaños de la intuición. Por su brevedad y por su elementalidad nos contentaremos con los dos siguientes:

(1) Supongamos que un interlocutor de mediana cultura, que sepa que España tiene más de 20 millones de habitantes, y que nuestro cuero cabelludo tiene más bastante menos de 5 cabellos por mm^2; preguntémosle si es seguro que existen dos españoles con igual número de cabellos.

La imposibilidad de imaginar la experiencia comparativa le hará sin duda declarar al pronto que la pregunta no tiene contestación posible.

Sin embargo, un sencillísimo razonamiento permite llegar donde la intuición no llega, y contestar afirmativamente; pues si todos los españoles tuviesen distinto número de cabellos, habría alguno con más de 20 millones de cabellos, para la cual necesitaría una superfície de cabeza mayor de 4 metros cuadrados.

(2) Propongamos al mismo interlocutor que imagine una cinta metálica pegada a la superfície de la Tierra, a lo largo del Ecuador, y preguntémosle si al cortarla e intercalar un trozo adicional de un metro se separaría un poco o mucho la cinta de la Tierra. Si responde intuitivamente, estimará, sin duda, que la separación resultaría imperceptible. Engaño de la intuición, pues siendo el radio invariablemente igual al perímetro dividido por la constante 2π, al añadir al perímetro un metro, el radio aumentará en $1{:}2\pi{=}0{,}16$ m. cualquiera que sea su magnitud.

Los cinco grupos fundamentales de axiomas.

- Axiomas I. *De enlace o incidencia.*
- Axiomas II. *De ordenación.*
- Axiomas III. *De congruencia o movimiento.*
- Axioma IV. *De paralelismo.*
- Axioma V. *De continuidad.*

CHAPTER 1

Enlace, ordenación y sentido en el plano

1. Las relaciones de incidencia

1.1. Axiomas de existencia y enlace:

AXIOMA. *I, 1. Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados "puntos", cuyo conjunto llamaremos "espacio".*

AXIOMA. *I, 2. Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados "planos" y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados "rectas".*

designaremos los puntos por letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots$, las rectas por minúsculas: $a, b, c, \ldots$ y los planos por letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

AXIOMA. *I, 3. Por dos puntos distintos pasa una recta y sólo una.*

AXIOMA. *I, 4. Por tres puntos no alineados pasa un plano y sólo uno.*

AXIOMA. *I, 5. Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los demás puntos de la recta lo están también.*

1.2. Otras determinaciones del plano.

TEOREMA 1. *Una recta y un punto exterior determinan un plano que pasa por ellos.*

TEOREMA 2. *Dos rectas distintas que tienen un punto común determinan un plano que las contiene.*

1.3. proyectar, trazar, unir, cortar. Dos rectas, o una recta y un plano con un solo punto común, se dice que *se cortan* en ese punto, o que son *secantes* en él, punto que se llama de *intersección*. También se llama *pie* o *traza* de una recta sobre la otra o sobre el plano.

1.4. Posiciones de dos rectas. Si dos o más rectas o puntos están en un mismo plano se dice que son *coplanarios*

TEOREMA 3. *Existen rectas no coplanarias.*

TEOREMA 4. *Dos rectas no coplanarias no pueden tener punto alguno común.*

Se dice que se *cruzan*.

Ejercicios

(1) ¿Cuántas rectas determinan n puntos no alineados tres a tres?
Solución:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

(2) ¿Cuántos planos determinan n puntos no coplanarios cuatro a cuatro?
Solución:

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(3) LLámase *cuadrilátero completo* a la figura formada por cuatro rectas secantes entre sí dos a dos, sin que tres de ellas pasen por un punto. Estas rectas se llaman *lados* del cuadrilátero, y sus puntos de intersección *vértices*. Se llaman *diagonales* del cuadrilt́ero las rectas que unen vértices no situados en un mismo lado. ¿Cuántos vértices y cuántas diagonales tiene el cuadrilátero completo?
Solución: 6vértices y 3 diagonales.

(4) Llámase *cuadrivértice completo* a la figura formada por cuatro puntos coplanarios no alineados tres a tres, llamados *vértices*, y las rectas que los unen dos a dos llamados *lados*. Llámanse *puntos diagonales* del cuadrivértice los puntos de intersección de lados no concurrentes en un vértice. ¿Cuántos lados tiene el cuadrivértice? ¿Cuántos puntos diagonales tiene a lo sumo? ¿Podemos asegurar su existencia?
Solución: 6 lados. 3 puntos diagonales a lo sumo. No, pues aún no podemos admitir la existencia de rectas paralelas hasta que no se introduzcan los axiomas de movimiento, la simetría central asegura la existencia de rectas sin puntos comunes (paralelas).

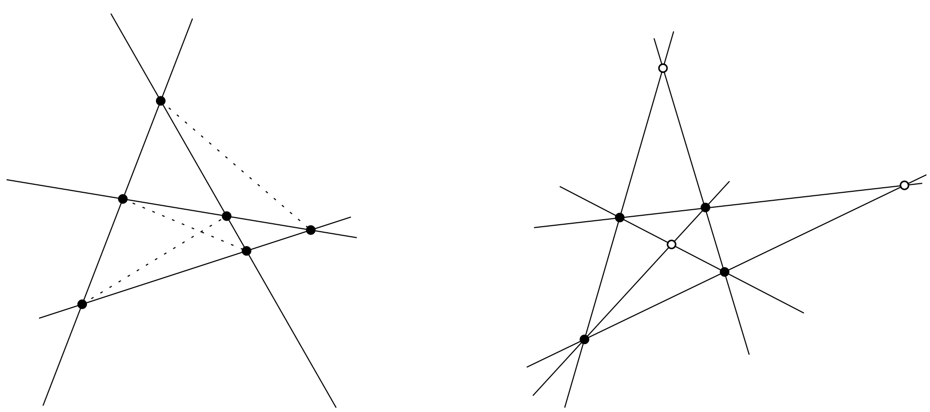

FIGURE 1. Cuadrilátero completo y cuadrivértice completo.

2. Las relaciones de orden y separación

2.1. Ordenación lineal. Conceptos "precede" y "sigue". *Diremos que un conjunto (finito o infinito) de elementos está ordenado linealmente cuando es posible relacionarlos entre sí mediante el verbo "preceder", de tal modo que:*

(1) *Dados dos elementos A y B, o "A precede a B" o "B precede a A".*
(2) *Si A precede a B, y B precede a C, A precede a C* (propiedad transitiva):

En lugar del verbo *preceder* puede emplearse el verbo *seguir*, cambiando entre sí los elementos. Es decir, si "A precede a B", "B sigue a A".

2.2. Conceptos “estar entre” y “separar”. Cuando un elemento B precede a C y sigue a A se dice que “*está entre*” A y C, o “entre C y A”, o también que *separa* ambos elementos.

TEOREMA 5. *Si D está entre A y B, y B está entre A y C, está también D entre A y C.*

2.3. Axioma de ordenación de los puntos de la recta.

AXIOMA. *II, 1. La recta es un conjunto linealmente ordenado de puntos que no tiene ni primero ni último punto, y en el que no hay puntos consecutivos.*

2.4. Definiciones de semirrecta y segmento. *El conjunto definido por un punto de una recta y todos los de esta que le preceden (o siguen) se llama “semirrecta”.*

El conjunto formado por dos puntos de una recta y todos los situados entre ambos se llama “segmento”.

TEOREMA 6.
(1) *El segmento que une dos puntos cualesquiera situados en dos semirrectas (una misma semirrecta) y distintos de su origen contiene (no contiene) dicho origen.*
(2) *Todo punto P interior a un segmento, le divide en dos partes o segmentos parciales.*

2.5. Pares de puntos separados. *Dados dos pares de puntos alineados, AB y CD, diremos que C y D están separados por A y B cuando uno de los puntos C o D pertenece al segmento AB y el otro no.*

TEOREMA 7. *La separación es recíproca.*

2.6. Axioma de la división del plano.

AXIOMA. *II, 2. Toda recta de un plano establece una clasificación de los puntos no contenidos en ella en dos únicas clases o regiones tales que:*

Todo punto exterior a r pertenece a una u otra región.

El segmento que une dos puntos AB (AC) de la misma (distinta) región no corta (corta) a la recta r.

TEOREMA 8. *Si, supuestos A, B, C no en r, AB no corta (AC corta) r A y B (A y C) están en la misma (distinta) región.*

TEOREMA 9. *Dados tres puntos A, B, C y una recta r de su plano que no pasa por ellos si r separa un par AC de estos puntos, separa también otro par BC, pero no el tercero.*

2.7. Definiciones de semiplano y de ángulo. *Dada una recta r del plano, el conjunto de sus puntos y los de cada una de las regiones en que divide al plano se llama “semiplano”.*

Dadas dos semirrectas no opuestas a y b, de origen común O, llamaremos ángulo convexo ab o, simplemente, ángulo ab a la interferencia de los (o conjunto de los puntos comunes a los) semiplanos siguientes: aquel cuyo borde es la recta a y que contiene b, y aquel cuyo borde es la recta b y que contiene a. Las semirrectas a y b se llaman *lados* y su origen común *vértice* del ángulo.

2.8. Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice. Angulo cóncavo y llano. Dos rectas secantes definen, pues, cuatro ángulos convexos según los semiplanos que hagamos interferir. Llamando α y α' los semiplanos limitados por la primera y β y β' los limitados por la segunda, estos ángulos son las interferencias de $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ y $\alpha'\beta'$.

Los pares de ángulos procedentes de la interferencia con un mismo semiplano α, como, por ejemplo, $\alpha\beta$ y $\alpha\beta'$ se llaman *adyacentes*. Los procedentes de interferencia de semiplanos distintos se llaman *opuestos por el vértice*, como, por ejemplo, $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$

Cada ángulo $\alpha\beta$ tiene, pues, dos adyacentes $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ y un opuesto por el vértice $\alpha'\beta'$. El conjunto de estos tres se llama *ángulo cóncavo* y se considerarán como lados de él los mismos del convexo $\alpha\beta$.

Para dar al concepto de ángulo la debida generalidad convendremos también en llamar *ángulo llano* a cada uno de los semiplanos limitados por dos rectas opuestas.

2.9. El ángulo como conjunto de rayos.

Teorema 10. *Si unimos un punto P perteneciente a un ángulo convexo y no situado en sus lados, es decir, interior a él, con el vértice O, todos los puntos de la semirrecta OP serán también interiores al ángulo. Lo mismo puede repetirse para un ángulo cóncavo.*

Los puntos interiores a un ángulo, pueden, pues, agruparse en semirrectas llamadas "rayos" interiores, y podemos considerar, así al ángulo como el conjunto de sus rayos interiores. Las semirrectas no interiores distintas de los lados se llaman *rayos exteriores* al ángulo.

Teorema 11. *El segmento que une dos puntos A y B respectivamente situados en lados distintos de un ángulo convexo, corta a todo rayo r interior.*

Corolario 1. *Todo rayo r interior a un ángulo convexo lo divide en dos partes o ángulos parciales situados en distinto semiplano respecto de r.*

2.10. Pares de rayos separados. Todas las semirrectas o rayos con origen común O se dice que constituyen un *haz* de vértice O.

Diremos que dos rayos a y b separan otros dos c y d, cuando uno de estos está en uno de los ángulos ab, y el otro en el otro ángulo.

Teorema 12. *La separación es recíproca.*

Corolario 2. *Si a, b están separados por c y d, los pares ac y bd, como los ad y bc, no están separados.*

2.11. Definición de triángulo y de polígono convexo. *Dados tres puntos A, B y C no alineados, llamaremos "triángulo" a la interferencia (conjunto de puntos comunes) de los tres semiplanos limitados por las rectas AB, BC y CA y que contienen respectivamente los puntos C, A y B.*

Los segmentos BC, CA y AB se llaman *lados* del triángulo; se les puede designar por las letras minúsculas a, b y c, y los puntos A, B y C se llaman *vértices*, respectivamente *opuestos* a aquellos lados.

Los ángulos determinados por cada dos de estos semiplanos se llaman *ángulos del triángulo*, y sus adyacentes *ángulos exteriores*.

Generalizando la definición anterior, diremos:

Si n puntos del plano, $A, B, C, \dots, F$ se han podido ordenar de modo que tres consecutivos no estén alineados y las rectas determinadas por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano los $n-2$ puntos restantes, se llama "polígono convexo" al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiplanos.

Los puntos $A, B, C, \dots, F$ se llaman *vértices* del polígono. Los segmentos $AB, BC, \dots, EF$, determinados por cada dos vértices consecutivos se llaman *lados* del polígono. Su conjunto se llama *contorno del polígono*. Los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos se llaman *diagonales*.

TEOREMA 13. *Todos los puntos del polígono convexo pertenecen a los ángulos definidos por cada dos semiplanos consecutivos.*

Ángulos que se llaman *ángulos del polígono*. Los ángulos adyacentes a los del polígono se llaman *ángulos exteriores*.

Según el número de lados, los polígonos se llaman *triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos*, etc.

2.12. Propiedad general de las figuras convexas. Llamaremos *figura* a todo conjunto de puntos.

Todas las figuras definidas por interferencia de semiplanos, como los ángulos convexos, triángulos y polígonos convexos, tienen la seguiente propiedad (que se adopta como definición general de *figura convexa*):

TEOREMA 14. *Todos los puntos del segmento que une dos puntos cualesquiera de una figura convexa, pertenecen también a ella.*

2.13. Propiedades de los polígonos convexos. Los puntos de un polígono, no pertenecientes al contorno, se llaman *interiores*. Los puntos no pertenecientes al polígono se llaman *exteriores*.

TEOREMA 15. *Toda semirrecta, con origen en un punto O interior de un polígono convexo, corta al contorno del polígono en un punto.*

COROLARIO 3. *Todo segmento OP que une un punto interior con otro exterior corta al contorno en un punto.*

COROLARIO 4. *Si un segmento no corta al contorno, sus extremos son ambos interiores o ambos exteriores.*

COROLARIO 5. *Toda recta trazada por un punto interior corta al contorno en dos puntos.*

COROLARIO 6. *En el exterior del polígono existen rectas que no cortan al contorno*

2.14. Teorema de Jordan. Dados varios segmentos $HL, LM, MN, \dots, ST$, de tal modo ordenados que cada uno de los intermedios tiene un extremo común con el anterior y otro con el siguiente (sin estar alineado con ellos), el conjunto de todos ellos se llama *línea quebrada* o *poligonal*, y dichos segmentos y puntos, *lados* y *vértices* de la quebrada.

Si el extremo K del primer segmento coincide con el extremo T del último se dirá que la poligonal es *cerrada*. Si los lados no tienen más puntos comunes entre sí que los mencionados, la poligonal se llama *simple*.

TEOREMA 16 (Teorema de Jordan). I *En todo polígono convexo, dos puntos M y N, ambos interiores (exteriores) pueden unirse por una quebrada que no corta al contorno.*

II *Toda quebrada que une un punto interior O con otro exterior M corta al contorno.*

3. El sentido en el plano

Conclusiones:

- Cada criterio de ordenación define un *sentido* en la recta; existen, por tanto, en ella *dos sentidos* que llamaremos *opuestos*.
- Una recta (segmento) en la cual se ha fijado un sentido se llama *recta orientada (segmento orientado)*. Un segmento orientado AB se llama también *vector* y se representa así: $\overrightarrow{AB}$. El punto A se llama *origen* y el B *extremo* del vector.
- Al suprimir un rayo de un haz, los restantes constituyen un conjunto linealmente ordenado, abierto y denso.
- En todo haz abierto podemos considerar dos sentidos.
- En todo plano existen dos sentidos opuestos.
- En toda poligonal existen dos sentidos opuestos.
- Una vez fijado el sentido de un solo haz del plano, queda determinado un sentido concordante en todos los demás haces y contornos poligonales convexos del plano[1]
- Hasta aquí hemos hablado de igualdad u oposición de sentidos; pero no es posible establecer, por vía geométrica pura, caracteres distintivos que los individualicen. Para conseguir este objetivo es necesario referirlos a elementos ajenos a la Geometría. Se suele acudir a tal objeto a la persona humana y al reloj. El sentido en que se mueven las saetas del reloj se llamará *negativo* y *positivo* al sentido opuesto.

[1]Lo mismo se llega a establecer para polígonos simples no convexos y para contornos curvos de Jordan.